



第十屆校際系統建模與優化競賽

COSMO

學生講座系列一

分配問題 (Allocation) 及
線性規劃 (Linear Programming)

4th July, 2015

© 2015 CUHK.
All Rights Reserved.

線性規劃

1) 欲望無限，但資源有限，因此有需要作出「最好」的決定來盡量滿足欲望。

2) Warm-up exercises

(L1) 小明上廣州、探親友、過新年。小明明天就回香港，他希望可在今天買到手信給香港的親戚好友，亦希望在廣州遊玩。買手信時，他希望購到大約為 100 元的手信，預計半小時定能買到一件稱心的手信。另一方面，遊玩的價錢大約為每小時 40 元，但他的媽媽只許他最多遊玩 3 小時。如果小明買到一件手信跟遊玩一小時同樣開心，他應該如何善用今天餘下的 4 小時，令自己最開心呢？假設小明有 400 元。

解： 變數：

設小明買 x 件手信，遊玩 y 小時。

限制：

(時間：) $0.5x + y \leq 4$ 或 $x + 2y \leq 8$

(金錢：) $100x + 40y \leq 400$ 或 $5x + 2y \leq 20$,

(其他：) $y \leq 3$,

(變數限制：) $x \geq 0, y \geq 0$

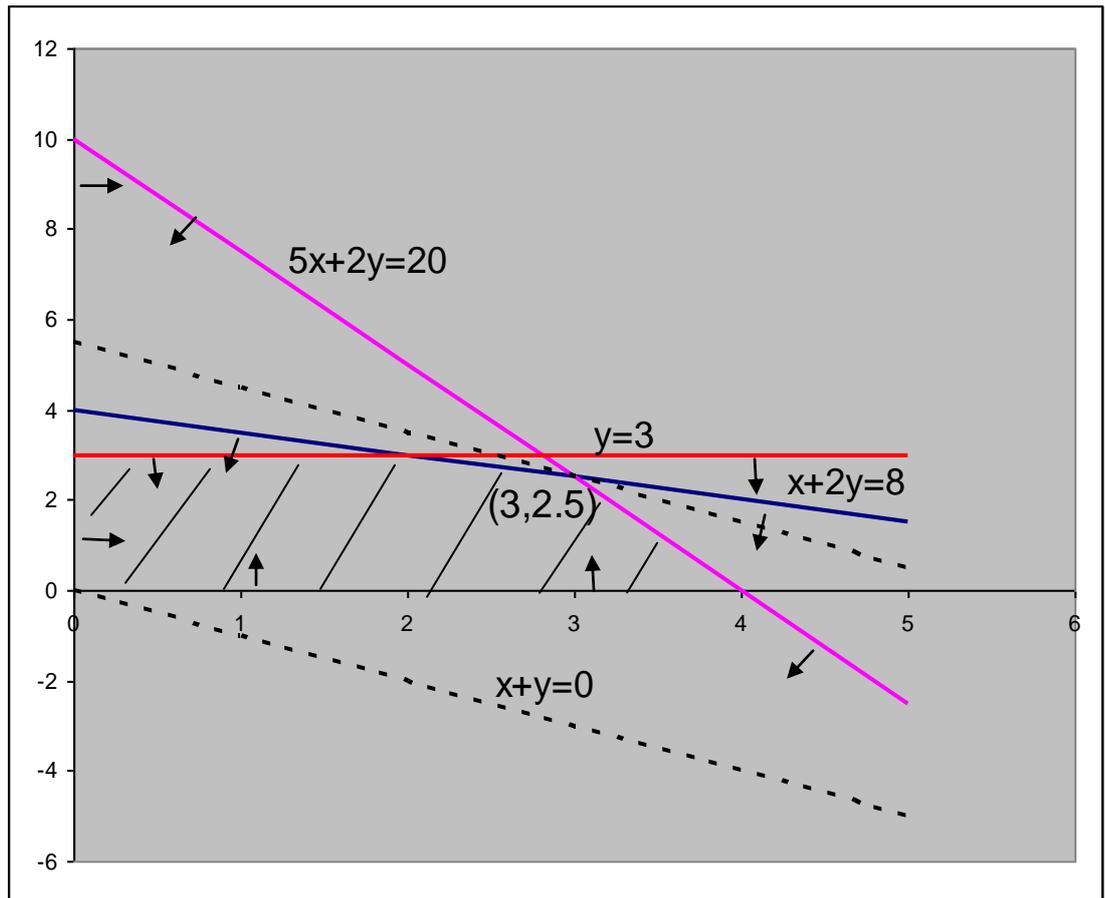
目標函數： $x + y$

目標：希望目標函數到達最大值。

模型：

$$\begin{array}{ll} \max & x + y \\ \text{s.t.} & x + 2y \leq 8 \\ & 5x + 2y \leq 20 \\ & y \leq 3 \\ & x \geq 0 \\ & y \geq 0 \end{array}$$

圖解法：



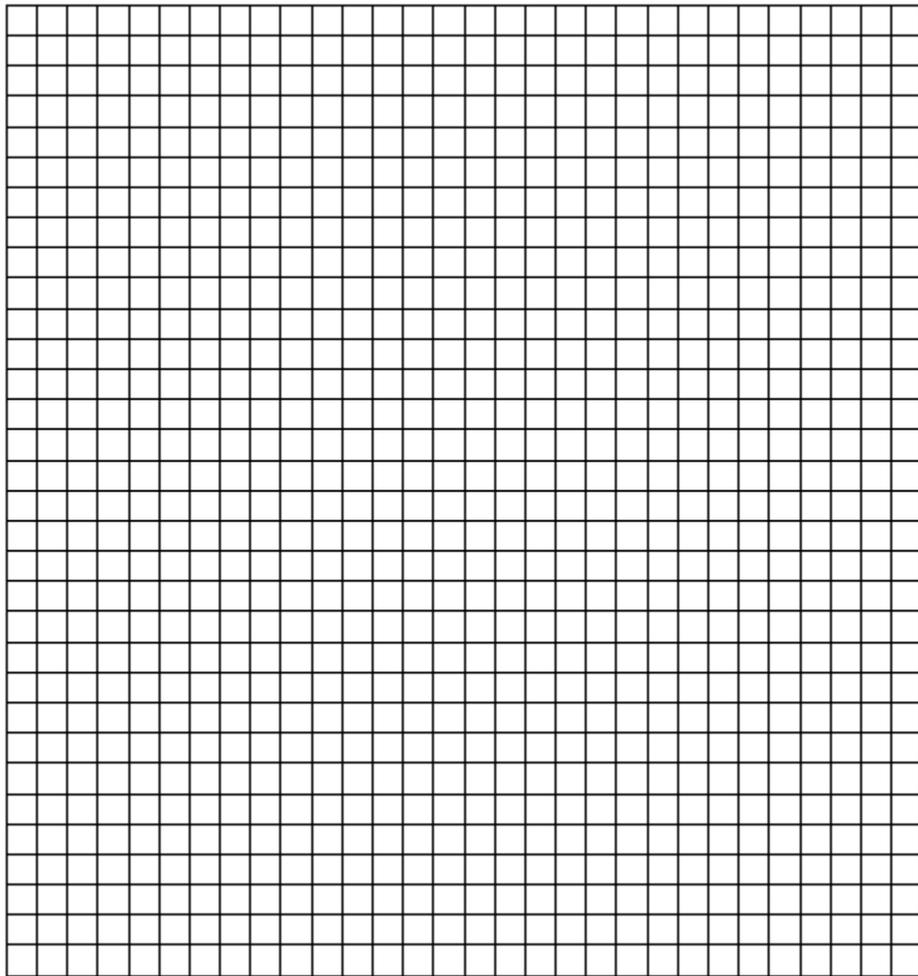
所以，當 $x=3$, $y=2.5$ 時，得到最優解。也就是說，如果小明今天買 3 件手信，遊玩 2.5 小時，就能令自己最開心。

Your turn:

- (L2) 小鵬最愛喝果汁茶，果汁茶由果汁及茶混合而成。為免果汁茶味道太淡，果汁和茶的份量比例最少為 1：2，1 公升果汁價錢為 8 元而 1 公升茶價錢為 5 元。小鵬身上有 45 元，小鵬應該買多少公升果汁和茶使果汁茶的份量最多呢？

(答案：果汁 2.5 公升，茶 5 公升。)

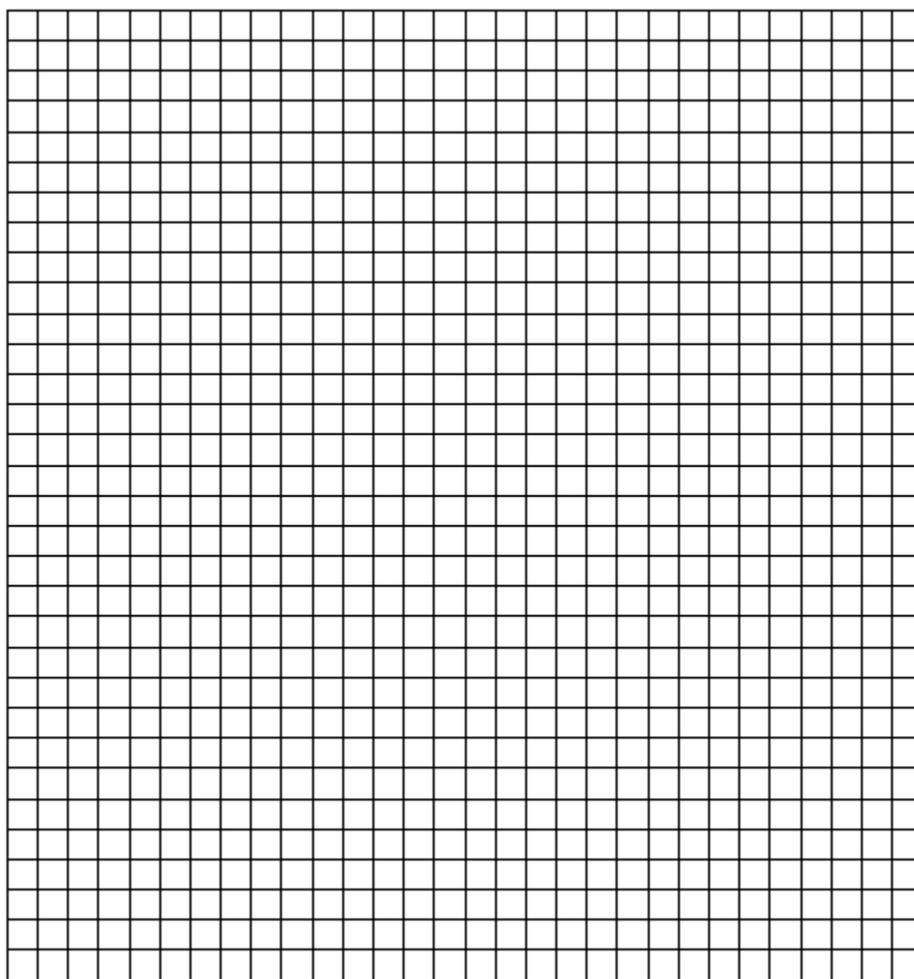
解：



- (L3) 小智是寵物小精靈訓練員，要帶著他的寵物小精靈進行他的旅程。每一隻寵物小精靈都可放進一個 200 立方厘米的精靈球(40 元)，以方便攜帶。由於旅途驚險萬分，小智決定至少攜帶 3 隻寵物小精靈及 6 個 150 立方厘米的藥包(每個 10 元)上路。可惜小智的背包只餘下 2000 立方厘米及身上只有 250 元，小智如何可善用背包餘下的空間呢？(假設小智覺得寵物小精靈比藥包重要得很多。)

(答案：小精靈 4 隻，藥包 8 個。)

解：



(L4) (多維模型)

某英超組球會為新一年球季作準備，開始組軍。球員名單當中有 18 名英國球員，8 名其他歐盟球員及 4 名非歐盟球員。其領隊每周有 50 萬英鎊作班費，而每名英國球員周薪為 30000 英鎊，其他歐盟球員周薪為 35000 英鎊，而非歐盟球員周薪為 40000 英鎊。但英超規定每隊球隊最少有 15 名、最多 25 名註冊球員，非歐盟球員不能超過 3 個，而其他歐盟球員及非歐盟球員總數不能超過 7 個。領隊認為 2 個非歐盟球員相當於 3 個英國球員重要，而 3 個其他歐盟球員相當於 4 個英國球員重要，請問該領隊應選入多少個英國球員、歐盟球員及非歐盟球員呢？

(答案：8 位英國球員，4 位歐盟球員，3 位非歐盟球員。)

解：

運輸問題

- 1) 運輸問題和分配問題都是線性規劃問題的一種，但它們均擁有特殊結構，故有其獨特求解方法。
- 2) 故此，即使不用寫出模型的規格，仍能進行優化！
- 3) 運輸問題背景：
 - 有 m 間工廠， n 間店舖
 - 每間工廠 i 能生產 s_i 件貨物
 - 每間店舖 j 需要 d_j 件貨物
 - c_{ij} 是每件貨物由工廠 i 運往店舖 j 的費用

目標：要滿足各店舖的需求，最少的運費該為多少？

4) (T1)

高中出版社設有 3 間印刷工場分別在柴灣(CW)、觀塘(KT) 及荃灣(TW)，4 間門市在銅鑼灣(CWB)、旺角(MK)、尖沙咀(TST)及沙田(ST)。印刷工場 TW、KT、CW 分別印刷 8000、6000、5000 本數學練習，而門市 CWB, MK, TST, ST 分別要求 5000、6000、4000 及 4000 本。各印刷工場與門市距離(公里)分別如下：

工廠 \ 門市	CWB	MK	TST	ST
CW	10	14	12	16
KT	12	8	10	10
TW	14	10	12	14

運費為每公里每 100 本\$1，求最少的運費使數學練習能運至各門市，並能滿足需求。

解： (i) 從左上方開始，先粗略分配資源，寫在每格右上方，並稱為 x_{ij} 值(劃定顏色格)

Plant \ Shop	1	2	3	4	s_i
1	10 5	14 3	12	16	8
2	12	8 3	10 3	10	6
3	14	10	12 1	14 4	5
d_j	5	6	4	4	

(ii) 對應各顏色格，利用 c_{ij} 來計算 u_i 和 v_j ($c_{ij} = u_i + v_j$ 及隨意定 u_1 為 0)。

Plant \ Shop	1	2	3	4	s_i	u_i		
1	10	5	14	3	12	16	8	0
2	12	8	3	10	3	10	6	-6
3	14	10	12	1	14	4	5	-4
d_j	5	6	4	4				
v_j	10	14	16	18				

(iii) 在非顏色格計算 r_{ij} 值 ($r_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$)。

Plant \ Shop	1	2	3	4	s_i	u_i		
1	10	5	14	3	12	16	8	0
2	12	8	3	10	3	10	6	-6
3	14	10	12	1	14	4	5	-4
d_j	5	6	4	4				
v_j	10	14	16	18				

(iv) 找出最負的 r_{ij} 值，以這格為起點，利用顏色格，找出一條循環路線

Plant \ Shop	1	2	3	4	s_i	u_i		
1	10	5	14	3	12	16	8	0
2	12	8	3	10	3	10	6	-6
3	14	10	12	1	14	4	5	-4
d_j	5	6	4	4				
v_j	10	14	16	18				

(v) 選取所有 x_{ij} 會減少的”轉角位”中，最少的 x_{ij} 值，並在每個”轉角位”及位點格加/減該值。如 $\min\{3, 3\}=3$

(vi) 將被選取的顏色格的顏色抹去，並為剛才的起點格上色，使兩格身份對調。

Plant \ Shop	1	2	3	4	s_i	u_i
1	10 5	14	12 3	16	8	0
				-2		
2	12	8 6	10 0	10		
	4			-2		
3	14	10	12 1	14 4	5	-4
	8	0				
d_j	5	6	4	4		
v_j	10	14	16	18		

(vii) 返回步驟(2)-(5)，直到所有非顏色格的 r_{ij} 格皆為非負值。

Plant \ Shop	1	2	3	4	s_i	u_i
1	10 5	14	12 3	16	8	0
		4		2		
2	12	8 6	10 0	10		
	4			-2		
3	14	10	12 1	14 4	5	0
	4	0				
d_j	5	6	4	4		
v_j	10	10	12	14		

Plant \ Shop	1	2	3	4	s_i	u_i
1	10 5	14	12 3	16	8	0
		4		2		
2	12	8 6	10 0	10		
	4		-	-2+		
3	14	10	12 1	14 4	5	0
	4	0	+	-		
d_j	5	6	4	4		
v_j	10	10	12	14		

Plant \ Shop	1	2	3	4	s_i	u_i
1	10 5	14 2	12 3	16 2	8	0
2	12 6	8 -	10 2	10 0		
3	14 4	10 -2+	12 1	14 4		
d_j	5	6	4	4		
v_j	10	12	12	14		

Plant \ Shop	1	2	3	4	s_i	u_i
1	10 5	14 4	12 3	16 4	8	0
2	12 4	8 2	10 0	10 4		
3	14 4	10 4	12 1	14 2		
d_j	5	6	4	4		
v_j	10	10	12	12		

所以應送 CW 應運 5000 本習作到 CWB，3000 本到 TST；
 KW 應送 2000 本到 MK，4000 本到 ST；
 TW 應送 4000 本到 MK，1000 本到 TST。

- (T2) 有三個牧場為四間雪糕廠供牛奶。牧場 1、2、3 每月分別能供牛奶 15、25、10 萬桶，除了雪糕廠 A 每月只需 5 桶，其他均需要 15 桶。每桶牛奶到各地的運費如下：

牧場 \ 雪糕廠	1	2	3	4
1	10	2	20	11
2	12	7	9	20
3	4	14	16	18

如何搬運牛奶，才使運輸成本減至最少？

(T3) 各工廠應分別運送多少數量至各配銷中心，才能獲致最低的總運輸成本？

配銷中心					
工廠	D1	D2	D3	D4	供給
S1	12	10	5	8	90
S2	7	4	9	6	120
S3	9	11	7	5	75
需求	65	80	90	50	

- 供給及需求單位：1卡車的量
- 單位運輸成本：千元

分配問題

- 1) 分配問題除了是線性規劃問題的一種，它亦是運輸問題的特例。
- 2) 故此，也是即使不用寫出模型的規格，仍能透過其特性進行優化！
- 3) 分配問題背景：
 - 有 n 件工作分給 n 個工人（機器）
 - 所有工作必須被分派出
 - 所有工人只能被獲分配一件工作
 - c_{ij} 是每個工人 i 做工作 j 時的產量

目標：要怎麼分配才能獲得最高產量？

- 4) (A1) 打字員工作安排

出版社每日有三種語文的文章要出版，三種語言分別為中文、英文及日文。小明、小家和小仁都是這家出版社的打字員，以下為他們打字的速度：

	中文	英文	日文
小明	60/min	100/min	30/min
小家	45/min	80/min	40/min
小仁	50/min	90/min	45/min

請問出版社應安排他們負責那一種語言呢？（假設出版社希望每分鐘打的字數為最多。）

解(1)：(i) 列表：

	中文	英文	日文
小明	60	100	30
小家	45	80	40
小仁	50	90	45

(ii) 找出最大數（最大數 = 100）

(iii) 最大數減各數

	中文	英文	日文
小明	100-60=40	100-100=0	100-30=70
小家	100-45=55	100-80=20	100-40=60

小仁	$100-50=50$	$100-90=10$	$100-45=55$
----	-------------	-------------	-------------

(iv) 行數與列數相同，做步驟(v)

(v) 找出各行最小數

	中文	英文	日文	行最小數
小明	40	0	70	0
小家	55	20	60	20
小仁	50	10	55	10

(vi) 各行分別減去其行最小數

	中文	英文	日文	行最小數
小明	$40-0=40$	$0-0=0$	$70-0=70$	0
小家	$55-20=35$	$20-20=0$	$60-20=40$	20
小仁	$50-10=40$	$10-10=0$	$55-10=45$	10

(vii) 找出各列最小數

	中文	英文	日文
小明	40	0	70
小家	35	0	40
小仁	40	0	45
列最小數	35	0	40

(viii) 各列分別減去其列最小數

	中文	英文	日文
小明	$40-35=5$	0	$70-40=30$
小家	$35-35=0$	0	$40-40=0$
小仁	$40-35=5$	0	$45-40=5$
列最小數	35	0	40

(ix) 以最少的橫或直線覆蓋所有 0

	中文	英文	日文
小明	5	0	30
小家	0	0	0
小仁	5	0	5

(x) 由於最少的橫及直線為 2，少於 3。找出沒有被覆蓋的數字的最小數 $k=5$ 。

(xi) 沒有被覆蓋的數字減去 k ，橫線和直線相交的數字加 k

	中文	英文	日文
小明	0	0	25
小家	0	5	0
小仁	0	0	0

(ix) 以最少的橫或直線覆蓋所有 0

	中文	英文	日文
小明	0	0	25
小家	0	5	0
小仁	0	0	0

最少的線數等於 3，則做步驟 12 以找出最優解

(xii) 選出三個 0，令致每一行和每一列都只有一個 0 被選出

	中文	英文	日文
小明	0	0	25
小家	0	5	0
小仁	0	0	0

答案一：

小明打中文、小家打日文、小仁打中文。

每分鐘字數為 $60+40+90=190$ 。

或

	中文	英文	日文
小明	0	0	25
小家	0	5	0
小仁	0	0	0

答案二：

小明打英文、小家打中文、小仁打日文。

每分鐘字數為 $100+45+45=190$ 。

或

	中文	英文	日文
小明	0	0	25
小家	0	5	0
小仁	0	0	0

答案三：

小明打英文、小家打日文、小仁打中文。

每分鐘字數為 $100+40+50=190$ 。

Your turn

(A2) 搬運貨物

小明打算分配物資搬運工作，所要搬運的東西包括：木材、磚、以及鋼筋，有無限的供應。他有三輛不同的貨車（甲，乙，丙），由於車身大小以及載重能力的限制，每車對每種物資的最大運載量限制如下：

	木材	磚	鋼筋
甲車	1	3	1.5
乙車	0.5	4	2
丙車	0.5	1	1

假如小明只可搬運一次，而每種物資均要搬運，請問小明該如何分配搬運工作（哪車搬運木材，哪車搬運磚，哪車搬運鋼筋），以運送最重的物資？

解：

(A3) 兩軍較量，調兵遣將

AB 兩國進行乒乓球團體對抗賽。雙方各出 5 人，進行 5 場單打對抗。每場對抗打 5 局。最終以總勝局數多的一方勝出。

A 方教練估計兩隊隊員對戰比數 (A:B) 如下：

	B1	B2	B3	B4	B5
A1	3 : 2	2 : 3	3 : 2	1 : 4	4 : 1
A2	2 : 3	3 : 2	4 : 1	2 : 3	1 : 4
A3	1 : 4	3 : 2	2 : 3	3 : 2	2 : 3
A4	3 : 2	2 : 3	2 : 3	1 : 4	3 : 2
A5	3 : 2	4 : 1	5 : 0	3 : 2	1 : 4

隊員可能打法相剋，故有 A1 勝 B1, B1 勝 A2, A2 勝 B2, B2 勝 A1 發生。假如 B 方隊員出場順序預計為 B1, B2, B3, B4, B5。那麼 A 方教練應該如何排兵佈陣，以求最大的總淨勝局數？

解：先簡化上表

	B1	B2	B3	B4	B5
A1	$3-2=1$	$2-3=-1$	$3-2=1$	$1-4=-3$	$4-1=3$
A2	$2-3=-1$	$3-2=1$	$4-1=3$	$2-3=-1$	$1-4=-3$
A3	$1-4=-3$	$3-2=1$	$2-3=-1$	$3-2=1$	$2-3=-1$
A4	$3-2=1$	$2-3=-1$	$2-3=-1$	$1-4=-3$	$3-2=1$
A5	$3-2=1$	$4-1=3$	$5-0=5$	$3-2=1$	$1-4=-3$