第十屆校際系統建模與優化競賽

COSMO

歷屆題目 (Past Papers)

歷屆題目 (Past Papers)

第一屆校際系統建模與優化競賽題目

香港某個機搆舉辦團體越野賽。按人數分組進行比賽，參賽隊伍帶着自己的隊旗，沿着指定的路綫前進，目標是將自己的隊旗插到最遠的地方。每名參賽隊員除了帶備各自必須的越野裝備外，最重要的是帶備飲用水，而每名參賽隊員有不同的最大負水能力。比賽期間，沒有飲用水補充，但是隊員之間可以共享。當隊中飲用水全部耗盡，該隊便要馬上停止前進，並把隊旗插在當地。任何隊員可以在任何時候退出比賽，並且將他 / 她的飲用水留給其他隊員使用。退出之隊員立即有交通工具接走，因此不會額外消耗飲用水。

問題一
由於比賽期間運動量大，隊員事先不能確定自己行進時的耗水速度。一般來說，身體強壯的隊員，負重能力強，行進的時候，耗水速度也大。為此，組織者隨機挑選了 10 人，事先在賽道上作試驗，以備參賽隊伍參考。試驗結果如下：

最大負水量 （公升）	5	6	4.5	5.5	4	7	6.5	8	5	6
平均耗水速度（公升/公里）	0.6	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.55	0.7	0.55	0.65

試找出最大負水量和耗水速度之間的大致關係。

問題二
你有一班同學好友，各自的負重能力相差無幾（差別小到可以忽略），計劃組隊參加比賽。請問在雙人組和三人組中，隊員應該如何合作，以把你們的隊旗插到最遠的地方？另外，若為了把隊旗插到一人組所能到達的三倍距離以外，你們最少需要多少隊員合作？

問題三
另外，學校田徑隊請你從隊中 10 名同學裏挑選隊員組成一隊參賽。經過測試，10 名同學的最大負水量是

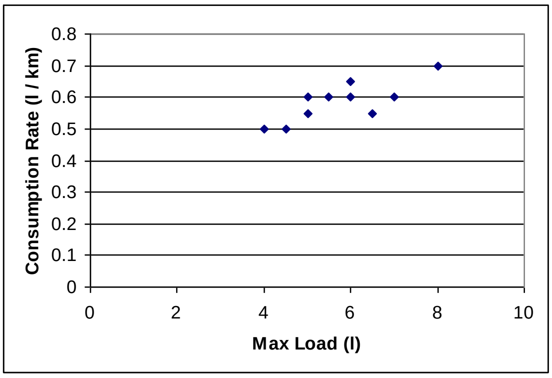
田徑隊員編號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
負水量（公升）	5	5	5.5	5.5	6	6	6	6	7	7.5

在只參加雙人組 / 三人組的情況下，請分別建議如何挑選同學參賽？如何安排比賽中的合作？行進的最長距離分別是多少？

請就以上三個問題，撰寫一份報告，闡述閣下的見解。

解答一

線性回歸



解答二

假設每名隊員負水 w 公斤，耗水速度 u 公斤/公里。

(a) 記隊員 A 在行走 x 公里后離開，並將水盡量送給 B 隊員。此時 B 隊員一共有水 2w – 2ux 碗. (而且在 2w – 2ux > w 之前，他們是不會如此操作的。當然 x < w/u)。那麼 B 同學還可以行走 (2w – 2ux)/u = 2w/u – 2x 公里，所以隊旗可以插在 x + 2w/u – 2x = 2w/u – x 公里處。于是問題就可以用以下模型來描述：

$$\text{Max} \quad 2w/u - x$$
$$\text{Subject to} \quad 2w - 2ux \le w$$
$$x \le w/u$$

用綫性規劃可以得到最優解為：x = w/(2u)，最優目標值為 1.5w/u 公里

(b) 記 A 隊員在行走 x 公里後離開，將水平分給 B 和 C。B 和 C 又行走 y 公里後 B 離開，將水留給 C。模型為：

$$\text{Max} \quad 3w/u - 2x - y$$
$$\text{Subject to} \quad 0 \le 3w - 3xu \le 2w$$
$$0 \le 3w - 3xu - 2uy \le w$$

用綫性規劃可以得到最優解為：x = w/(3u), y = w/(2u)，最優目標值為 11w/(6u)

(c) 通過上述求解，可以猜測在 n 人隊伍中，第一位隊員應該在 w/(nu) 公里處離開，使得剩下的 n-1 名隊員負水 (n-1)w。 這樣，n 人隊伍應該比 n-1 人隊伍多走 $w/(n \times u)$ 公里，所以 n 人隊伍可以走 $(1 + 1/2 + 1/3 + \ldots + 1/n) \times (w/u)$。要使得 $1 + \ldots + 1/n \ge 3$，n 最少需要 11。(1 + ... + 1/10 = 2.929, 1 + ... + 1/11 = 3.02)。

解答三

(a) 顯然，選 w_i/u_i 最大的同學參賽。根據前面的線性回歸, 負水量約大的同學，這個比例越大。所以，選 w_i 最大的同學參賽。

(b) 選 w_i 最大的兩名同學參賽。可以分兩種情況討論：(i) w_i 較大的同學先離開，用前面的線性規劃決定最后的距離。(ii) w_i 較小的同學先離開，用前面的線性規劃決定最后的距離。最后比較哪個距離最大。

(c) 選 w_i 最大的三名同學參賽。分兩步討論第一步決定誰先離開，那麼他離開的時間必定是他/她的水剛好可以使得另外兩人滿負荷帶水，第二步就利用(b)的結論，決定還能行進多遠。這樣，這一問需要比較三中可能。

歷屆題目 (Past Papers)

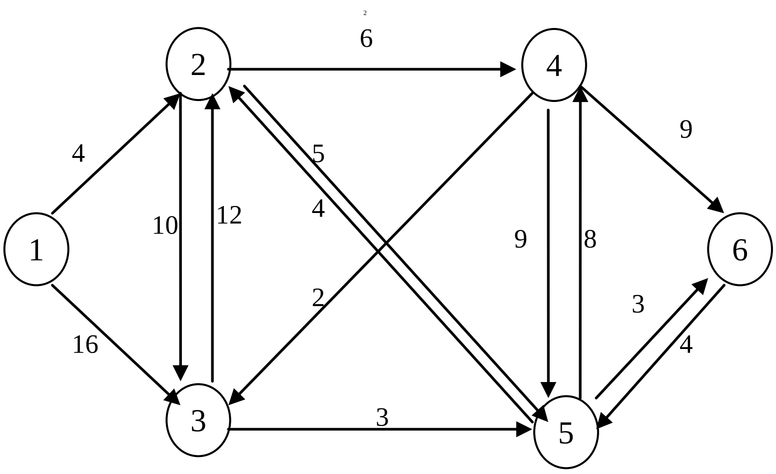
第二屆校際系統建模與優化競賽

The 2nd Interschool Competition on System Modeling & Optimization (COSMO)

12 May 2007

題目

2008 年北京奧運會召開在即，這對於體育界和傳媒界都是一項盛事。屆時各國將派出體育代表團參加獎牌角逐，各家媒體也會派出記者隊伍追蹤報導。在比賽期間，每天都將會有不同的項目在各個比賽場館進行。各主要比賽場地的位置圖如下所示，圓圈代表體育場館，箭頭代表連接各個體育場館之間的道路，箭頭上的數字是指場地之間的交通時間（分鐘）。注意車輛只能沿箭頭所指方向行駛，不可逆行。



1：運動員和記者中心
2：大學體育館
3：籃球館
4：國家體育場
5：奧林匹克水上運動中心
6：體操館

某天，根據比賽日程，有如下項目將要舉行：

	比賽場館	時間
田徑	國家體育場	9:00-10:10
籃球	籃球館	11:25-12:25
乒乓球	大學體育館	10:30-11:00
游泳	奧林匹克水上運動中心	10:15-11:10
體操	體操館	11:25-1:00

問題一

現在已經知道香港體育代表團將參加今天所有這些比賽項目。假如你是香港體育代表團的總教練，爲了讓運動員儘快到達比賽場，熟悉場地準備比賽，你希望找出從運動員入住的運動員和記者中心到所有比賽場的最短路程，你應當如何解決？

要求：建立相應的數學模型並給出解答。

問題二

有一家香港報社也派出了記者報導北京的這次奧運會。該報社一共派出 6 名記者 （A-F），他們將採訪比賽現場，並將最新的賽況傳回香港總部，及時報導。每位記者各自有他們擅長及不擅長報導的項目。比如記者 A，他最熟悉游泳項目，如果派他報導游泳，採訪結果可得 15 分，而他非常不熟悉籃球，如果報導籃球，他的新聞只能得 2 分。下面的表格給出了每位記者採訪不同項目的分值：

作爲報社的主編，爲了達到最佳的報導效果，你當然要仔細選擇該如何派出記者，使得

	A	B	C	D	E	F
乒乓球	5	1	16	5	7	18
籃球	2	10	4	17	0	4
田徑	10	8	8	3	4	6
游泳	15	20	7	2	19	10
體操	3	20	2	1	10	16

這 6 名記者採訪所得的總分最大。另外，由於場地和設備所限，只有國家體育場允許每家媒體派出兩名記者前往，其餘比賽場館只能有一名記者在現場報導。同時每位記者只能報導他所分配的項目。你該如何做呢？

要求：建立相應的數學模型並給出解答。

問題三

另外有一家香港的電視臺也會派出記者，但是他們還沒有決定要派出多少人。爲了節約成本，同時又不錯過一分鐘比賽，該電視臺決定派遣最少的記者，全程報導當天舉行的各項賽事。假如你知道比賽日程和比賽場地地圖如上，你該如何決定記者人數？

更爲一般的問題，如果你知道各個比賽的起止時間，各個比賽的場地，以及各個比賽地點之間交通時間，你又該如何決定你所需要的最少記者人數，同時又不錯過一分鐘的比賽。

要求：先對第二個一般的問題建立相應的數學模型並設計算法或電腦程序，再用你的算法或電腦程序計算這家電視臺所需的記者人數。

提示：同一名記者可以報導不同的比賽，但必須考慮記者從一個賽場前往另一個賽場的交通時間。

請就以上三個問題，撰寫一份報告，闡述閣下的見解。

Solution for Question 1: 1-2: path 1-2, total time: 4
1-3: path 1-2-4-3, total time: 12
1-4: path 1-2-4, total time: 10
1-5: path 1-2-5, total time: 9
1-6: path: 1-2-4-3-5-6, total time: 18

Solution for Question 2: See the excel file. Maximum value is 92.

Solution for Question 3:

We can formulate the problem as a minimum flow problem.

First, calculate the shortest paths between each stadium to decide the travel time from one to another.

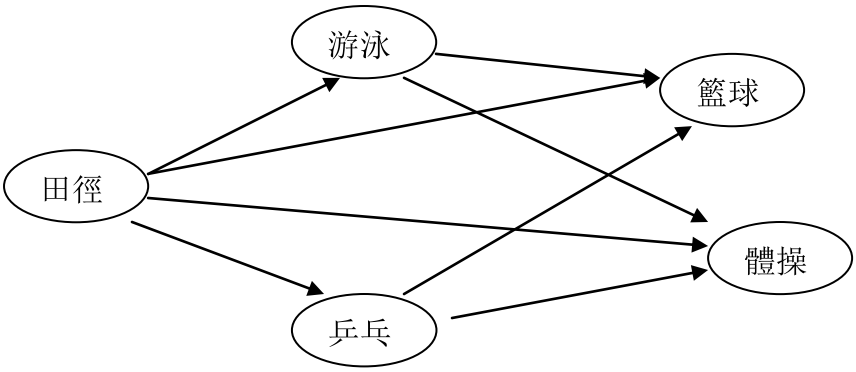
Second, sort the events in an ascending order of beginning time:

In this question, the order is as follows:

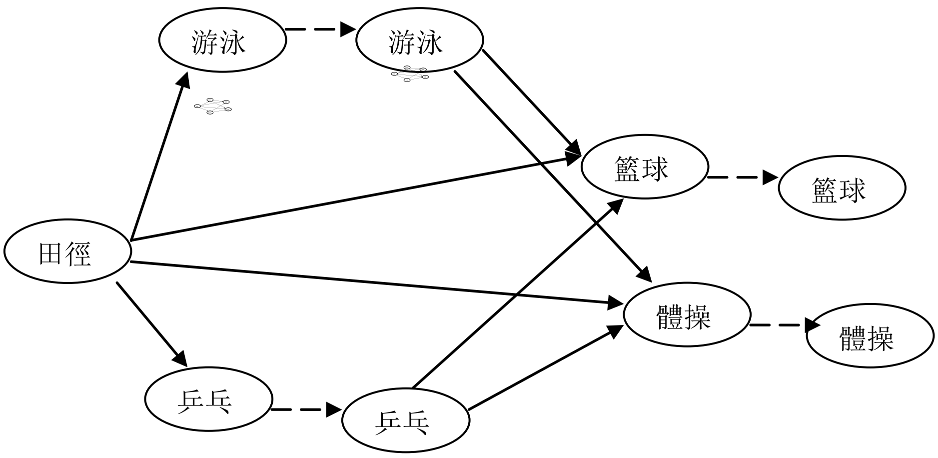
田徑　游泳 乒乓球 籃球 （體操）

Third, construct a network shown in the following. The network contains a node for each event and an arc from node i to node j if it is possible that a reporter finish the whole event i and then travel to the stadium where event j is on and start reporting event j.

In the problem, the network is



Fourth，transform this problem to the framework of the maximum flow problem as follows. Split each node i into two nodes i’ and i’’ and add the arc (i’, i’’). Set the lower bound on each arc (i’, i’’) to be 1 so that for each event at least 1 reporter cover the event.



Fifth, the maximum flow is 2. That is the answer.

歷屆題目 (Past Papers)

第四屆校際系統建模與優化競賽

The 4th Interschool Competition on System Modeling & Optimization (COSMO)

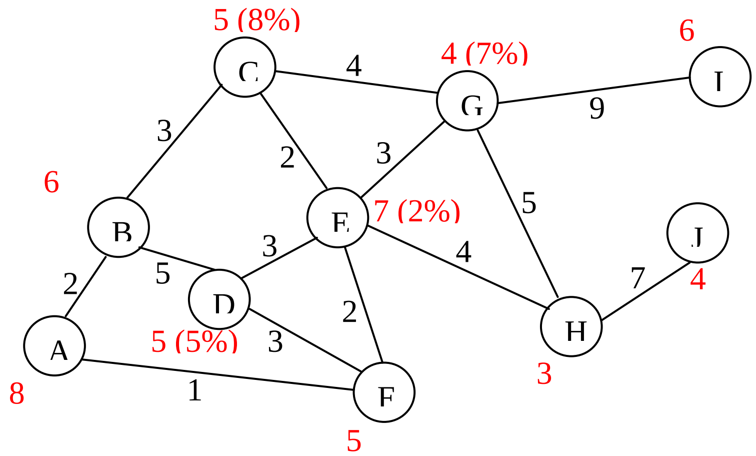
9 May 2009

題目

近日，人類豬流感（H1N1 甲型流感）肆虐全球，香港亦面臨很大的威脅。尤其在第一個確診病患出現後，特區政府採取了一系列的措施加強防禦。其中最重要的一項是隔離病患以及與病患有過接觸的人士。爲此目的，衛生署決定設立兩個隔離中心，要求將出現流感症狀的人士送往這兩個中心強制隔離。

下圖是經過簡化以後的香港各區地圖。圖上的節點代表一個區，節點之間的連綫代表各區之間的交通幹綫。節點上的數字分別表示在該區設立隔離中心的費用和該區人口佔全港人口的比例。例如，在 A 區設立隔離中心需耗資 8 百萬元，A 區人口佔香港人口的 20%。連綫上的數字表示區與區之間的距離。例如，C 區與 G 區之間隔 4km。

請就以下兩個問題，撰寫一份報告，闡述閣下的見解。



問題一：

如果在 B 區和 G 區設立了兩處隔離中心，請分別將所有各區運送隔離人士至其中一個中心的路綫列出。為了減小在運送途中感染他人的機會，要求這些路綫是盡可能的短。

問題二：

假如你是衛生署署長，你應當如何選擇設立這兩個中心？這裡主要有三個考慮。第一，設立這兩個中心的費用要求盡可能的低；第二，在同一區內，不能設立兩個中心；第二，平均每一個病人送往這兩個中心的路綫要盡可能的短，這樣可以減小病患感染他人的機會。我們可以假設在各區發現病患的幾率與各區的人口成比例。

請針對以上三項考慮，建立適當的數學模型並求出最優的方案。

問題一：

各區到 B 區的距離分別為：2， 0， 3， 5， 5， 7， 7， 9， 16， 16
各區到 G 區的距離分別為：9， 7， 4， 6， 3， 5， 0， 5， 9， 12
兩個距離取最小值，得到：

A -> B: 2
B -> B: 0
C -> B: 3
D -> B: 5
E -> G: 3
F -> E -> G: 2+ 3 = 5
G -> G: 0
H -> G: 5
I -> G: 9
J -> H -> G: 7 + 5 = 12

問題二：

1. 先計算出每區兩兩之間的最短距離如下：

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
A	0	2	5	7	7	9	9	11	18	18
B	2	0	3	5	5	7	7	9	16	16
C	5	3	0	5	2	4	4	6	13	13
D	7	5	5	0	3	3	6	7	15	14
E	7	5	2	3	0	2	3	4	12	11
F	9	7	4	3	2	0	5	6	14	13
G	9	7	4	6	3	5	0	5	9	12
H	11	9	6	7	4	6	5	0	14	7
I	18	16	13	15	12	14	9	14	0	21
J	18	16	13	14	11	13	12	7	21	0

2. 設計一個目標函數來平衡隔離中心的設計費用以及最短路徑 （根據不同的考慮方案，所設計的目標函數可不同）：

假設 X 區和 Y 區被選為隔離中心，cost(X)表示在 X 區設立隔離中心的費用，p(X)表示居住在 X 的人口比例，d(X, Y)表示從 X 區到 Y 區的最短路徑

那么目標函數可以設計為 （僅供參考）

$F(X, Y) = cost(X) + cost(Y) + \sum_{Z=A,\cdots,J}(p(Z) * \min(d(Z, X), d(Z, Y)))$

對與所有可能的兩個區 X 和 Y，最后選中的隔離區必須滿足 F(X, Y)最小。根據以上的目標函數 F(X, Y)算得在 G 區和 H 區設立隔離中心使得目標函數最小。

第五屆校際系統建模與優化競賽
The 5th Interschool Competition on System Modeling & Optimization (COSMO)

1 May 2010

題目

上海世博會(Shanghai Expo 2010) 開幕在即，後勤支援工作任務繁重。鑒于安全方面的考慮，大會組織者禁止遊客私自攜帶飲料入場。因此會場內必須準備充足的飲用水。如果大會事先能夠知道世博開幕日當天入場的確切人數，組織者就可以預訂下確切數量的飲用水。可是，由於種種原因，大會不能準確得知人數，組織者面對應該預訂多少飲用水的難題。

根據世博會程序，遊客應在會前預約， 並在預約時段憑預約證明進入園區參加開幕日的活動。針對此程序，大會組織者有三次機會訂購飲用水。第一次是在接受預約前。此時距世博會開幕尚有時日，水價較平，每公升需要 1 元。第二次在遊客預約之後，大會開幕之前。此時訂購，水價每公升 1.4 元。第三次是開幕日當天臨時訂購，因爲時間倉促，水源供應商和運輸商會徵收較貴水價，每公升需要 2 元。

假如你是大會組織者，你應當如何安排飲用水供應？一方面，飲用水要能滿足遊客的需要；另一方面，過量的訂購會造成不必要的浪費，回收沒有用的飲用水需要每公升 0.5 元的處理費用。大會組織者希望用於購買和回收水的費用要盡量少。可以假設每位遊客需要飲用水 1 公升。

請針對以上三項考慮以及下面兩個問題提供的信息，建立適當的數學模型並求出最優的方 案。撰寫一份報告，闡述閣下的見解。

問題一：

初步估計，預約人數有三种可能：50,000 人，20,000 人，8,000 人。每种可能出現的幾率相同。在每种可能下，有 80%的機會所有預約的人士都會出席；有 10%的機會 90%的預約者會出席；有 10%的機會只有 80%的預約者會出席。

問題二：

預約的人數有 N 种可能：$w_1, w_2, \cdots, w_N$ 。 而且滿足

$$w_1 > w_2 > \cdots > w_N.$$

有 w_i 人預約的可能性為 q_i，$1 \leq i \leq N$。

預約人士中間有 p_1 % 的機 會全部前往出席開幕式，有 p_2 % 的機會 90%的人會出席，有 p_3 % 的機會 80%的人會出席。

請盡力做出你認爲最完滿的答案。

問題一答案:

分階段討論。

1. 在開幕日當天，不足的飲用水需要購買， 多餘的水需要處理。

- 假如預約人數為 50，000，需要找到最佳的公升數 a:

  If a>50,000, the amount of water exceeds the demands. Incurs recycle costs
  If 45,000<a<50,000, the cost will be

  (50,000-a)╳80%╳2 + (a-45,000) ╳ 10% ╳ 0.5 + (a-40,000) ╳ 10% ╳ 0.5

  If 40,000<a<45,000, the cost will be

  (50,000-a)╳80%╳2 + (45,000-a) ╳ 10% ╳ 0.5 + (a-40,000) ╳ 10% ╳ 0.5

  If a<40,000, the amount of water cannot satisfy the demand. Incurs order cost.

  The optimal *a* should be 50,000. The corresponding cost is 750 yuan.

- 假如預約人數為 20，000:

  If a>20,000, the amount of water exceeds the demands. Incurs recycle costs
  If 18,000<a<20,000, the cost will be

  (20,000-a)╳80%╳2 + (a-18,000) ╳ 10% ╳ 0.5 + (a-16,000) ╳ 10% ╳ 0.5

  If 16,000<a<18,000, the cost will be

  (20,000-a)╳80%╳2 + (18,000-a) ╳ 10% ╳ 0.5 + (a-16,000) ╳ 10% ╳ 0.5

  If a<16,000, the amount of water cannot satisfy the demand. Incurs order cost.

  The optimal *a* should be 20,000. The corresponding cost is 300 yuan.

- 假如預約人數為 8，000:

  If a>8,000, the amount of water exceeds the demands. Incurs recycle costs
  If 7,200<a<8,000, the cost will be

  (8,000-a)╳80%╳2 + (a-7,200) ╳ 10% ╳ 0.5 + (a-6,400) ╳ 10% ╳ 0.5

  If 6,400<a<7,200, the cost will be

  (8,000-a)╳80%╳2 + (7,200-a) ╳ 10% ╳ 0.5 + (a-6,400) ╳ 10% ╳ 0.5

If $a<6,400$, the amount of water cannot satisfy the demand. Incurs order cost.

The optimal *a* should be 8,000. The corresponding cost is 120 yuan.

2. 在第二階段，得知預約人數後，應當立即購買或者回收水達到 part 1 給出的最佳的公升數。

3. 在第一階段，找到最佳的公升數 b:

If $20,000<b<50,000$, the cost will be

$b+ (50,000-b) \times 1.4 \times 33.3\% + (b-20,000) \times 33.3\% \times 0.5 + (b-8,000) \times 33.3\% \times 0.5$

If $8,000<a<20,000$, the cost will be

$b+ (50,000-b) \times 33.3\% \times 1.4 + (20,000-b) \times 33.3\% \times 0.5 + (b-8,000) \times 33.3\% \times 0.5$

The optimal *b* should be 50,000.

問題二答案：

該問題 open-ended.
需要學生能夠按照問題一的思路建立分階段分析的模型。評判可以根據學生完成建模的程度給出優劣成績。如果能做出完整答案者為最優。

第六屆校際系統建模與優化競賽 The 6th Interschool Competition on System Modeling & Optimization (COSMO)

30 April 2011

題目

近年來，內地婦女來香港生子成為社會各界和媒體的關注熱點。據香港醫管局統計，近年內地婦女在港產下的嬰兒數目有明顯的上升趨勢，從 2004 年的 3600 人急升到 2005 年的 8800 人，2008 年更激增至 35000 多人。最新資料顯示，2010 年，在香港出生的 8.8 萬個嬰兒中，4.1 萬來自內地，接近總數的一半。為確保公立醫院面向本地居民的服務質素不受影響，最近政府推行嚴厲限制措施，公立醫院已經不再接受內地居民來港產子的預約申請。在這樣的形勢之下，香港私立醫院大舉擴張，增加產房和護士人手，分娩費用也節節攀升，更提供床位預定服務，為在互相競爭中獲得更高額的利潤。[1][2]

在開展預定床位業務時，如果預定數量恰好等於醫院產科的床位數量，則由於有些產婦不能按期入住，導致空床的出現而使醫院的收益減小。如果接受預定的客戶數量超過床位數量太大，則按期前來生產的產婦不能及時入住，從而醫院會因為要向這批客戶提供賠償金而影響其收入和聲譽。

由於產婦的準確生產時間一般難以確定，醫院允許產婦每次預約時向醫院申請預留一個星期的床位。根據個人不同的需要，客戶可以進行多次預約。某私立醫院產科有床位 50 個，在每次預約時，醫院即向客戶收取總額 HK$70,000 的服務費（包括所有的相關費用）。而該醫院產科一週的總開銷為 HK$500,000，醫院為每一位已經預約並在期間內到達卻因為床位已被佔滿而不能入住的產婦提供 HK$5,000 的賠償金[3]。

現在醫院需要為產科製定相應的預約數目以達到產科每週收益的最大化。為簡化問題，你可以做以下假設：

1. 醫院以每週（為日曆週，即從星期一至星期日）為單位接受預約，每位客戶僅限一個床位，每週開始時，醫院認為所有床位都可以被重新分配。
2. 醫院不接受臨時入住，僅僅接受預約客戶#。
3. 預約期內，客戶可在任何時間入住或出院，同樣需要全額付出一週的服務款項。
4. 所有預約客戶的優先級一樣，按照到醫院的先後順序安排床位直到所有床位都已經佔滿。
5. 所有產婦在預約時間段內完成生產，順利出院#。

問題 1. 假設預約的產婦有 10%的概率能夠全部履約前來醫院產科，20%的概率只有 90%的人能夠履約前來，30%的概率只有 80%的預約產婦能夠履約前來，40%的概率只有 70%的產婦

能夠履約前來。現在醫院有四種方案，開放預定數分別為 60, 70, 80, 90。哪一種方案能夠給醫院帶來最大平均收益？

問題 2. 假設每一位預約的產婦不能履約前來產科的概率為 p，產婦之間能否履約前來以及個人在多個預約的時間段之間是相互獨立的。請建模表示醫院產科每週的平均收益。

問題 3. 各私家醫院為了獲得高額利潤設定超額的可預定床位數量，並引起了大規模的投訴。政府為了保障消費者的權益，限定每個預約週期內被擠掉的人數不能大於 j，否則會被記錄在案，繼而向社會公佈，從而影響該醫院的聲譽。但當被擠掉的人數不大於 j 的概率超過 90% 時，醫院基本上傾向於冒險對政府的該項限制不予理睬。在這種情況下，請建模優化醫院產科每週的平均收益。

[1]赴港生子應三思
http://www.daifumd.com/_daifumd/dochome/html/810/articles/article_167276.html
[2]內地掀起大陸人去港生孩子熱潮 http://hm.people.com.cn/GB/14363834.html
[3]香港醫院/私家醫院網站 http://www.852.com/hospital/hospitals.htm

[免責聲明] 鑑於本次競賽題目中的某些設定可能會引起一些人士的不安，特此申明如下：題目中有關各方的立場和策略均為假設，並不代表競賽組織者鼓勵或者反對任何一方的實際意圖。對於題目要求參賽者單方面從醫院的立場出發進行模型的設計，也僅是出於假設和簡化問題的需要，若實際情況與此類似，則純屬巧合。競賽組織者僅藉此提醒公眾和政府部門提高對這一社會問題的關注，並思考採取措施平衡有關各方的利益的必要。

問題一答案：

令 S(m)為當預約數為 m 時醫院每週的平均收益, s(k)為按期赴約的人數為 k 時醫院每週的收益

1. 若預約人數為 60 人
   a) 如果 60 人都到
      s(60) = 50 * 70,000 – 500,000 – (60-50) * 5,000 = 2950,000
   b) 如果 54 人能到
      s(54) = 50 * 70,000 – 500,000 – (54-50) * 5,000 = 2980,000
   c) 如果 48 人能到
      s(48) = 48 * 70,000 – 500,000 = 2860,000
   d) 如果 42 人能到
      s(42) = 42 * 70,000 – 500,000 = 2440,000

   平均收益為
   S(60) = 0.1*s(60) + 0.2*s(54) + 0.3*s(48) + 0.4*s(42) = 2725,000
2. 若預約人數為 70 人平均收益為
   S(70) = 2940,000
3. 若預約人數為 80 人平均收益為
   S(80) = 2930,000
4. 若預約人數為 90 人平均收益為
   S(90) = 2890,000

故當預約數定為 70 時，該醫院產科獲得最大平均收益。

問題二答案：

令 S(m)為當預約數為 m 時醫院每週的平均收益, s(k)為按期赴約的人數為 k 時醫院每週的收益
建模目的：確定預定數的最佳限額 x
條件：醫院的收益 S 最大

將 S 表達成 x 的函數，根據 S(x)最大求出相應的 x 值
S - 產婦服務收入，醫院運營費用，賠償金
P – 預約前來的但是不能按期入住的產婦數量，被擠掉的人數

預定了床位的產婦是否按時前來入住是隨機的，從而導致 S, P 都是隨機的，需要考慮它們的數學期望
模型假設
n –床位容量，常數 (題目中為 50)
g – 產婦服務收入，常數（題目中為 70,000）
r – 醫院每週的運營費用，常數（題目中為 500,000）
b - 每一位預約產婦前來，但因沒有空床而無法按期入住得到的賠償金，常數（題目中為 5,000）

x - 預約限額，x>n
p - 每一位預約產婦不按期前來醫院入住的概率，各產婦是否按期入住是相互獨立的

設 m 個預約產婦中有 k 人未按時前來入住，這件事情發生的概率記為 p_k，醫院的收益 s(k). 於是醫院的週平均收益可以表示為

$$S(m) = s(0)p_0 + s(1)p_1 + \ldots + s(m)p_m = \sum_{k=0}^{m} s(k)p_k$$

$$s(k) = \begin{cases} (m-k)g - r, & m\text{-}k \le n \\ ng - r - (m-k-n)b, & m\text{-}k > n \end{cases}$$

$$p_k = C_m^k p^k (1-p)^{m-k}$$

$$S(m) = \sum_{k=0}^{m-n-1} [ng - r - (m-k-n)b]p_k + \sum_{k=m-n}^{m} [(m-k)g - r]p_k$$

$$= qmg - r - (g+b)\sum_{k=0}^{m-n-1} (m-k-n)p_k$$

問題三答案：

被擠掉的客戶數不超過 j 人的概率 $P_j(m)$, 等於說按時前來的產婦數量大於 n+j, 即，不按時前來入住的產婦人數少於 m-n-j.

$$P_j(m) = \sum_{k=0}^{m-n-j-1} p_k$$

目標函數：

$$\max \quad S(m) = qmg - r - (g+b)\sum_{k=0}^{m-n-1}(m-k-n)\,p_k$$

subject to

$$P_j(m) = \sum_{k=0}^{m-n-j-1} p_k <= 90\%$$

第七屆校際系統建模與優化競賽
The 7th Interschool Competition on System Modeling & Optimization (COSMO)

April 2012

題目

於今年開始實施的高中及高等教育學制改革 (NSS 334)中, 香港的所有中學教育將由七年縮短至六年，大學本科學位學習期限由三年增至四年。新的四年學制讓各間大學有更充分的時間幫助學生擴寬知識視野，發展學術能力，並創造一個更加靈活的學習環境。當大學教授以及行政人員們致力於課程改進和校園基礎設施建設以應對這一新的變化的同時，他們亦希望能設計出一個更有效的方法來安排課室，達到充分利用現有校園資源容納更多學生的目的。假如你現在任職於香港一間大學，教務處長指示你分配教室給各門科目。

請就以下三個問題，撰寫一份報告，闡述閣下的見解。

問題一：

如果有 3 間教室，它們的基本情況如下：

教室	可用時間	容量(座位)
1	09:00-11:00	100
2	10:00-11:00	150
3	09:00-11:00	200

你需要安排如下 3 門課：

課程	授課時間	註冊學生人數
A	2 小時	90
B	1 小時	110
C	1 小時	70

假如每間教室在使用時需要消耗的電力和其他支持費用正比于它的容量， 每座位每小時 1 元。教務處長希望你能針對以上三項考慮，建立適當的數學模型並求出最有效率的方案。2 小時的課程必須連續講授。

問題二：

更一般地，如果有 N 間教室，它們的基本情況如下：

教室	可用時間	容量(座位)
1	a_1 - b_1	n_1
2	a_2 - b_2	n_2
…	……	…
N	a_N - b_N	n_N

你需要安排如下 M 門課：

課程	授課時間	註冊學生人數
1	c_1 小時	d_1
2	c_2 小時	d_2
…	… …	…
M	c_M 小時	d_M

其中，$a_i, b_i, n_i,\ i = 1, \cdots, N$；$d_j,\ j = 1, \cdots, M$ 都是整數。授課時間 c_j 只有兩種可能，1 小時或者 2 小時。2 小時的課程必須連續講授。請你就這個一般性問題，建立適當的數學模型並給出求解的方法。

問題三：

在問題二中，爲了保證質量，大學規定任何註冊人數超過 d 的課程需要拆成小班教學。我們假設現在所有課程都滿足 $d_j \leq 2d$，即拆成 2 個小班就可達到大學要求。一門課程的不同小班都由同一位教授講授，所以它們不能安排在同一時間。請問：你能否根據現有教室的情況，找到最佳拆班方案，並且給出最有效率的課程安排？ 注意, 將一個大班平均拆成 2 個小班並非最優答案。

Question 1 & 2
(Question 1 and 2 can use the same method, but Question 1 requires a specific answer.)

Objective Function:
Minimization of room charges

Constraints:
I. Each class must be assigned to a classroom
II. No two classes should occupy the same classroom as the same time
III. The number of students cannot exceed the classroom capacity
IV. For two-hour-classes, the first hour cannot be assigned to the last timeslot of the day

Solution:
I. Sort all classrooms by capacity for each timeslot
II. Sort classes by enrollment.
Do the assignment observing all the constraints.

Question 3
Student answer varies
Class will be split into two classes. You may split it evenly or unevenly. Discuss for each case.

第八屆校際系統建模與優化競賽

The 8th Interschool Competition on System Modeling & Optimization (COSMO)

香港國際貨櫃碼頭公司(以下簡稱 HIT)曾經直接雇用工人，但是從本世紀初開始，HIT 將其部分業務外判以減少成本。最近由 HIT 外判工人引起的罷工，引起了全社會的廣泛關注，造成了民衆對於 HIT 的反感和批評。

假設你在一家咨詢公司工作。你的一個項目是為一家公司提供內包和外判策略的建議。一項工作如果是在公司內部生產稱爲內包；如果給公司外的承包商生產稱爲外判。考慮到 HIT 外判帶來的不良影響，這家公司希望重新考慮其內包和外判的策略。

這家生產釘書機的公司正在計劃下一個季度的生產。每個釘書機有三個部分構成：base, staple cartridge, handle。在一個訂書機中, 每個部件的數量都是 1 個。這家公司在 A,B,C 三個不同地點都有生產廠房。如果一個釘書機在公司內生產，它可以由其中任何一個廠房生產。在目前的生產容量下，每季度每個地點的廠房運作不能超過 400 個小時。這家公司可以選擇將部分或者全部生產任務外判給其他承包商。

生產每個單位所需的時間如下表所示。將 3 個部件組裝成訂書機的時間可以忽略不計。

	生產時間 (小時)			
地點	Base	Cartridge	Handle	最長生產時間（小時）
A	0.03	0.02	0.05	400
B	0.04	0.02	0.04	400
C	0.02	0.03	0.01	400

每個部件內包和外判的單位生產成本如下。

部件	內包成本	外判成本
Base	$0.75	$0.95
Cartridge	$0.40	$0.55
Handle	$1.10	$1.40

每個釘書機在市場上售價為$3.5。為簡單起見，我們假設如果一個訂書機交給某個廠房生產或者外判個某個承包商，它的所有部件都由此廠房或承包商生產。

請撰寫一份報告回答以下問題。如果你覺得這裡給出的假設或者條件不夠，你可以自己提出假設，並在報告中清楚說明。

1・ 假設下一個季度市場的需求是 18,000 個釘書機，找出這家公司最優的內包和外判策略。

2・ 現在考慮一個更加現實的情況：下個季度的需求是隨機的。這家公司需要在季度初決定其生產量 （部分或者全部生產任務可以外判）。我們假設如果實際需求超出生產總量，沒有被滿足的需求就損失掉了。根據這家公司過去的經驗，需求可能取 n 個不同的值：$d_1, d_2, \ldots, d_n$。取 d_i 的概率是 p_i（$i = 1, 2, \ldots, n$）， 並且 $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$。

這家公司的最優策略是什麼？他們關心平均利潤。請建立相關的數學模型並討論如何找到最優策略。當 $n = 2$, $d_1 = 12{,}000,\ p_1 = 0.1$, $d_2 = 20{,}000,\ p_2 = 0.9$ 時，請找出最優策略。

3・ 考慮到 HIT 最近面臨的問題，這家公司想全部生產都由公司內部完成。由於需求可能會超過現在的生產容量，這家公司考慮是否應該擴大生產容量。在每個地點，最長生產時間可以擴大 200 個小時。用額外容量進行的生產，每單位耗時和原來是一樣的，但成本是原來的 1.5 倍。請建立相關的數學模型並討論如何找到最優策略。

4・請討論完全內包是否是一個不好的策略。

Solutions:

1. Since the revenue of next quarter is known, the company minimizes the production cost. The unit cost for producing in house is $2.25, while the unit cost for outsourcing is $2.95. Therefore the optimal strategy will first use up the current capacity and the remaining amount will be outsourced.
   The number of units assigned to A, B and C is 4000, 4000, 6666 respectively, and the amount outsourced equals to 18000-4000-4000-6666=3334.

2. Let x_A, x_B, x_C and x_O be the number of units assigned to department A, B, C and outsourced. Then the problem can be formulated mathematically as follows:

Maximize $3.5 * \sum_{i=1}^{n} p_i \min(d_i, x_A + x_B + x_C + x_O) - 2.25 * (x_A + x_B + x_C) - 2.9 * x_O$

Subject to

$$0.1x_A \le 400$$
$$0.1x_B \le 400$$
$$0.06x_C \le 400$$
$$x_A, x_B, x_C, x_O \ge 0$$

This problem can be directly solved by the excel solver. Alternatively it can be solved using linear programming (LP): Solve n-1 sub-problems by constraining $x_A + x_B + x_C + x_O$ to $[d_1, d_2], \ldots, (d_{n-1}, d_n]$. Each sub-problem is an LP, which can be solved by the excel solver. Then compare the optimal solutions of all the sub-problems. The final solution is the one that achieves the maximum expected profit.

For the numerical example, the optimal solution is $x_A = 4000,\ x_B = 4000,\ x_C = 6666,\ x_O = 5334$. The maximum expected profit is $18733.

3. Let x_A, x_B, x_C be the number of units assigned to department A, B, C. If they are greater than the current capacity, it means more capacity needs to be added. The problem formulation now becomes:

   Maximize
$$3.5 * \sum_{i=1}^{N} p_i \min(d_i, x_A + x_B + x_C) - 2.25 * (\min(x_A, 4000) + \min(x_B, 4000) + \min(x_C, 6666))$$
$$-3.375 * (\max(x_A - 4000, 0) + \max(x_B - 4000, 0) + \max(x_C - 6666, 0))$$

   Subject to
$$0.1x_A \le 600$$
$$0.1x_B \le 600$$
$$0.06x_C \le 600$$
$$x_A, x_B, x_C \ge 0$$

   The idea of solution is the same as part 2.

Remark: The formulation in part 2 and 3 is not unique. Any reasonable solutions are acceptable.

4. This is an open question. Students can discuss the advantages/disadvantages of completely insourcing from various perspectives, like its effect on profit, workers, etc. The effect on profit can be figured out by comparing part 2 and 3.

第九屆校際系統建模與優化競賽

The 9th Interschool Competition on System Modeling & Optimization (COSMO)

2014 年世界盃已經舉行。晉級的球隊在這項賽事中角逐這個世界上最富盛名的足球冠軍。

第一題

你在安排一個虛擬的國際足聯世界盃中某一個小組的比賽。該組中有 n 支球隊，其中 n 是一個偶數。每一支隊每次跟其它隊交手一次。所有比賽都在一個體育場舉行並且一天中最多只能有三場比賽。讓我們假設 n=8, 並且所有比賽在 15 天內舉行。請提供一個比賽的日程表使得每支球隊在比賽之間得到的總休息天數是差不多一樣的。注意一支球隊不能在同一天比賽兩次及以上。

注：如果一支球隊在第一，三，五，六，九，十二，十四天比賽，那麼它比賽之間得到的總休息天數是 1+1+0+2+2+1=7。

第二題

在一個虛擬的國際足聯世界盃中，有 N 個小組，每組中有 M 支球隊。你現在負責安排所有小組的比賽。這些比賽將在連續 D 天内在 S 個體育場舉行。每一天中最多只能安排 K 場比賽。注意一支球隊不能在同一天比賽兩次及以上。我們同時假設每一支球隊與其所在小組其它球隊僅比賽一次，與其它小組中的球隊沒有比賽。世界盃組織者想找到一個比賽的日程安排使得每支球隊在比賽之間得到的總休息天數是差不多一樣的。

(1) 你想把這個問題轉化成一個優化問題。其中一個挑戰是目標函數應該是什麼。以下是關於刻畫所有球隊比賽之間總休息天數的差異性的兩种辦法（**當然還有其它辦法。以下只是建議，你不必採納**）

讓 T=NM， $D_1, D_2, \dots D_T$ 表示第一支，第二支..., 第 T 支球隊 比賽之間總休息天數。定義它們的平均 $\overline{D}=\dfrac{1}{T}\sum_{i=1}^{T}D_i$

建議 1: 你可以用關於均值的平均絕對偏差來刻畫差異性， 定義如下

$$平均絕對偏差=\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T}\left|D_i-\overline{D}\right|$$

建議 2: 你可以用方差（關於均值的平均平方偏差）來刻畫差異性， 定義如下

$$方差=\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T}\left(D_i-\overline{D}\right)^2$$

目標是最小化差異性。儅差異性等於 0 時，所有球隊在比賽之間的總休息天數是一樣的。

請將日程安排問題轉化成一個優化問題。在你的答案中請明確指出決策變量，目標函數，以及所有變量應滿足的限制。在 日程安排中， 你不必要確定比賽在哪個體育場舉行。

(2) 請提出一個算法解決該優化問題。該算法可以是啓發式的。你不用數學上證明你提供的解的最優性。

提示：因爲目標函數是非綫性的， 標準的綫性規劃算法不可以直接應用。

(3) 當 N=4, M=8, D=15, K=10 時，用你的算法找出日程安排。

(4) 現在假設有 12 個體育場(S=12)， 並且每個體育場在 15 天中最少要舉辦 5 場比賽。在(3)找到的日程中，請指出每場比賽在哪個體育場舉行。

Solution to Problem 1

The first part does not require students to formulate the problem as an optimization problem. They can use whatever method (e.g. trial and error) to find a schedule that meets the objective. The following provides a suggested solution by solving the corresponding optimization problem using simulated annealing.

Formulate the problem as follows which is a nonlinear integer programming problem, using variance as the measure of variability.

$$\begin{aligned}
\min \quad & f(x) \\
s.t. \quad & \sum_{1\le i<j\le 8} 1_{\{x_{ij}=l\}} \le 3, \forall l \in \{1,2,\cdots,14,15\} \\
& \sum_{1\le j\le 8} 1_{\{x_{ij}=l \text{ or } x_{ji}=l\}} \le 1, \forall l \in \{1,2,\cdots,14,15\}, i \in \{1,2,\cdots,7,8\} \\
& x_{ij} \in \{1,2,\cdots,14,15\}, \forall (i,j) \in \{(m,n):1\le m<n\le 8, m,n\in N\} \\
& x_{ij} = 0, \forall (i,j) \notin \{(m,n):1\le m<n\le 8, m,n\in N\}
\end{aligned}$$

Notations:

1. The teams are labeled as $1,2,\cdots,7,8$;
2. $x \in N^{8\times 8}$ denotes one schedule, $x_{ij}=l$ means that the match i-th team against j-th team is scheduled at l-th day if $l \in \{1,2,\cdots,14,15\}$ while $x_{ij}=0$ means there is no match for i-th team against j-th team;
3. Let $y_i(x)$ denote the total rest days between matches for i-th team which is completely determined by x, so the objective function is defined as follows,

$$f(x)=\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8}\left(y_i(x)-\bar{y}(x)\right)^2, \bar{y}(x)=\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8}y_i(x)$$

Algorithms of Problem 1

We use simulated annealing algorithm to solve this problem, the algorithm is processed as follows,

Step 1: Generate a feasible x randomly, compute corresponding object value $f(x)$, set the initial temperature to $T > 0$;

Step 2: Randomly select a feasible solution x_{new} around x, compute its corresponding object value $f(x_{new})$, if it's optimal enough, then stop and x_{new} is what we want. Otherwise, let $p = \exp\left\{\frac{f(x) - f(x_{new})}{T}\right\}$, if $p \geq 1$, replace x with x_{new}, otherwise replace x with x_{new} according to probability p.

Step3: Decrease the temperature, i.e. replace T with a T_{new} such that $0 < T_{new} < T$. Then go to step 2.

The following is a possible schedule

Day	Match 1	Match 2	Match 3
1	2-8	5-6	
2	4-8		
3	3-8		
4	3-4	5-7	1-6
5	2-5	4-6	
6	1-5	2-3	
7	2-6	7-8	
8	1-2	6-7	
9	1-8	3-6	4-5
10	1-3	2-4	5-8
11	4-7		
12	2-7	3-5	6-8
13	1-4		
14	3-7		
15	1-7		

Total rest days during matches for each team:

Team	Playing Days	Total Rest Days
1	4,6,8,9,10,13,15	5
2	1,5,6,7,8,10,12	5
3	3,4,6,9,10,12,14	5
4	2,4,5,9,10,11,13	5
5	1,4,5,6,9,10,12	5
6	1,4,5,7,8,9,12	5

7	4,7,8,11,12,14,15	5
8	1,2,3,7,9,10,12	5

Solution to Problem 2

(1) Formulate the problem as follows which is a nonlinear integer programming problem, using variance as the measure of variability.

$$
\begin{aligned}
\min \quad & g\left(x^1, x^2, \cdots, x^N\right) \\
s.t. \quad & \sum_{1\le i<j\le M,k} 1_{\{x_{ij}^k = l\}} \le K, \forall l \in \{1,2,\cdots,\mathrm{D}\} \\
& \sum_{1\le j\le M} 1_{\{x_{ij}^k = l \text{ or } x_{ij}^k = l\}} \le 1, \forall l \in \{1,2,\cdots,D\}, i \in \{1,2,\cdots,M\}, k \in \{1,2,\cdots,N\} \\
& x_{ij}^k \in \{1,2,\cdots,D\}, \forall (i,j) \in \{(m,n): 1 \le m < n \le M, m,n \in Z\}, k \in \{1,2,\cdots,N\} \\
& x_{ij}^k = 0, \forall (i,j) \notin \{(m,n): 1 \le m < n \le M, m,n \in Z\}, k \in \{1,2,\cdots,N\}
\end{aligned}
$$

Notations:

1. The teams in each group are labeled as $1,2,\cdots,M$, each group is labeled as $1,2,\cdots,N$;

2. $x^1, x^2, \cdots, x^N \in N^{M\times M}$ denotes one schedule, $x_{ij}^k = l$ means that the match i-th team against j-th team in k-th group is scheduled at l-th day if $l \in \{1,2,\cdots,D\}$ while $x_{ij}^k = 0$ means there is no match for i-th team against j-th team in k-th group;

3. Let $y_i^k(x)$ denote the total rest days between matches for i-th team in k-th group which is completely determined by $x = \left(x^1, x^2, \cdots, x^N\right)$, so the objective function is defined as follows,

$$
g\left(x^1, x^2, \cdots, x^N\right) = \frac{1}{MN}\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{M}\left(y_i^k(x) - \bar{y}(x)\right)^2, \bar{y}(x) = \frac{1}{MN}\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{M} y_i^k(x)
$$

(2) **Algorithm of Problem 2**

We use simulated annealing algorithm to solve this problem, the algorithm is processed as follows,

Step 1: Generate a feasible set of $x^1, x^2, \cdots, x^N$ randomly, compute corresponding object value $g\left(x^1, x^2, \cdots, x^N\right)$, set the initial temperature to $T > 0$;

Step 2: Randomly select a feasible solution $x^1{}_{new}, x^2{}_{new}, \cdots, x^N{}_{new}$ around $x^1, x^2, \cdots, x^N$, compute its corresponding object value $g\left(x^1{}_{new}, x^2{}_{new}, \cdots, x^N{}_{new}\right)$, if it's optimal enough, then stop and $x^1{}_{new}, x^2{}_{new}, \cdots, x^N{}_{new}$ is what we want. Otherwise, let

$$p=\exp\left\{\frac{g\left(x^1,x^2,\cdots,x^N\right)-g\left(x^1{}_{new},x^2{}_{new},\cdots,x^N{}_{new}\right)}{T}\right\}$$, if $p\ge 1$, replace x with x_{new}, otherwise replace x with x_{new} according to probability p.

Step3: Decrease the temperature, i.e. replace T with a T_{new} such that $0<T_{new}<T$. Then go to step 2.

(3) **The following is a possible schedule when N=4, M=8, D=15, K=10**, A, B, C, D represent group label and 1,2,3,4,5,6,7.8 represent team number.

Day	Match 1	Match 2	Match 3	Match 4	Match 5	Match 6	Match 7	Match 8	Match 9	Match 10
1	A1-A2	A3-A7	C3-C8	A4-A5	C5-C6	A6-A8				
2	D2-D5	A2-A7	D3-D4	A3-A5	B3-B5	C4-C5				
3	D1-D8	B2-B7	D2-D7	B3-B4	C3-C4	D3-D6	B5-B6	C5-C7		
4	B1-B3	C1-C6	D2-D3	B2-B6	C2-C8	B4-B8	D4-D5	A6-A7		
5	D1-D3	B3-B7	C2-C3	C4-C6	B4-B5	D4-D8	A5-A8	B6-B8		
6	A1-A6	D1-D5	C1-C8	A2-A4	C2-C7	B3-B6				
7	A1-A3	C3-C7	B1-B5	C1-C5	C2-C6	A4-A8	C4-C8	D5-D8	D6-D7	
8	C1-C3	A1-A4	B1-B7	D1-D7	A2-A3	D2-D6	B4-B6	A5-A7	C6-C7	
9	A1-A8	B2-B4	C2-C4	A3-A6	D3-D8	A4-A7	D5-D7	B5-B8	B6-B7	
10	A1-A5	B1-B2	D1-D2	A2-A6	C2-C5	D3-D5	A3-A8	D4-D6	B7-B8	C7-C8
11	A2-A5	C3-C5	B2-B3	A4-A6	C4-C7	D4-D7	B5-B7	C6-C8	A7-A8	
12	A1-A7	C3-C6	D2-D4	A2-A8	A3-A4	A5-A6	C5-C8	D6-D8		
13	B1-B4	C1-C4	D1-D4	D3-D7	B2-B5	D2-D8	B3-B8	D5-D6		
14	B1-B6	D1-D6	C1-C7	B2-B8	B4-B7	D7-D8				
15	B1-B8	C1-C2								

Total rest days for each team:

Team	Playing Days							Rest Days
A1	1	6	7	8	9	10	12	5
A2	1	2	6	8	10	11	12	5
A3	1	2	7	8	9	10	12	5
A4	1	6	7	8	9	11	12	5
A5	1	2	5	8	10	11	12	5
A6	1	4	6	9	10	11	12	5
A7	1	2	4	8	9	11	12	5
A8	1	5	7	9	10	11	12	5
B1	4	7	8	10	13	14	15	5
B2	3	4	9	10	11	13	14	5
B3	2	3	4	5	6	11	13	5
B4	3	4	5	8	9	13	14	5

B5	2	3	5	7	9	11	13	5
B6	3	4	5	6	8	9	14	5
B7	3	5	8	9	10	11	14	5
B8	4	5	9	10	13	14	15	5
C1	4	6	7	8	13	14	15	5
C2	4	5	6	7	9	10	15	5
C3	1	3	5	7	8	11	12	5
C4	2	3	5	7	9	11	13	5
C5	1	2	3	7	10	11	12	5
C6	1	4	5	7	8	11	12	5
C7	3	6	7	8	10	11	14	5
C8	1	4	6	7	10	11	12	5
D1	3	5	6	8	10	13	14	5
D2	2	3	4	8	10	12	13	5
D3	2	3	4	5	9	10	13	5
D4	2	4	5	10	11	12	13	5
D5	2	4	6	7	9	10	13	5
D6	3	7	8	10	12	13	14	5
D7	3	7	8	9	11	13	14	5
D8	3	5	7	9	12	13	14	5

(4) Note that it's sufficient to distribute the matches scheduled in Problem 2 (3) to the stadiums and ensure that each stadium gets at least 5 matches.

Day	Match 1	Match 2	Match 3	Match 4	Match 5	Match 6	Match 7	Match 8	Match 9	Match 10
1	A1-A2(1)	A3-A7(1)	C3-C8(1)	A4-A5(1)	C5-C6(1)	A6-A8(1)				
2	D2-D5(1)	A2-A7(1)	D3-D4(1)	A3-A5(2)	B3-B5(2)	C4-C5(2)				
3	D1-D8(2)	B2-B7(2)	D2-D7(2)	B3-B4(2)	C3-C4(2)	D3-D6(2)	B5-B6(3)	C5-C7(3)		
4	B1-B3(3)	C1-C6(3)	D2-D3(3)	B2-B6(3)	C2-C8(3)	B4-B8(3)	D4-D5(3)	A6-A7(4)		
5	D1-D3(4)	B3-B7(4)	C2-C3(4)	C4-C6(4)	B4-B5(4)	D4-D8(4)	A5-A8(4)	B6-B8(4)		
6	A1-A6(5)	D1-D5(5)	C1-C8(5)	A2-A4(5)	C2-C7(5)	B3-B6(5)				
7	A1-A3(5)	C3-C7(5)	B1-B5(5)	C1-C5(6)	C2-C6(6)	A4-A8(6)	C4-C8(6)	D5-D8(6)	D6-D7(6)	
8	C1-C3(6)	A1-A4(6)	B1-B7(6)	D1-D7(7)	A2-A3(7)	D2-D6(7)	B4-B6(7)	A5-A7(7)	C6-C7(7)	
9	A1-A8(7)	B2-B4(7)	C2-C4(7)	A3-A6(8)	D3-D8(8)	A4-A7(8)	D5-D7(8)	B5-B8(8)	B6-B7(8)	
10	A1-A5(8)	B1-B2(8)	D1-D2(8)	A2-A6(9)	C2-C5(9)	D3-D5(9)	A3-A8(9)	D4-D6(9)	B7-B8(9)	C7-C8(9)
11	A2-A5(9)	C3-C5(9)	B2-B3(10)	A4-A6(10)	C4-C7(10)	D4-D7(10)	B5-B7(10)	C6-C8(10)	A7-A8(10)	
12	A1-A7(10)	C3-C6(10)	D2-D4(11)	A2-A8(11)	A3-A4(11)	A5-A6(11)	C5-C8(11)	D6-D8(11)		
13	B1-B4(11)	C1-C4(11)	D1-D4(11)	D3-D7(12)	B2-B5(12)	D2-D8(12)	B3-B8(12)	D5-D6(12)		

14	B1-B6(12)	D1-D6(12)	C1-C7(12)	B2-B8(12)	B4-B7(12)	D7-D8(12)
15	B1-B8(12)	C1-C2(12)				

Number of matches played at each stadium:

Stadium	No. of Matches
1	9
2	9
3	9
4	9
5	9
6	9
7	9
8	9
9	9
10	9
11	9
12	13